

امتحان وطني تجريبي للبكالوريا

شعبة العلوم التجريبية

الموسم الدراسي : 2024 - 2025

مادة الرياضيات	مدة الإنجاز : 3 ساعات		معامل المادة : 7

	Exercice 01 (2,5 points)
	On considère la suite (U_n) définie par : $$\begin{cases} U_0 = 4 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} = \ln(2)U_n + 2 - \ln(4) \end{cases}$$
0.5	1)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n \geq 2$.
0.5	2a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = (\ln(2) - 1)(U_n - 2)$, puis en déduire que la suite (U_n) est décroissante. (on prendra : $\ln 2 \approx 0.7$)
0.25	2b) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
	3) On considère la suite (V_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$; $V_n = U_n - 2$.
0.5	4a) Montrer que la suite (V_n)est une suite géométrique de raison $q = ln(2)$.
0.25	4b) Montrer que : $U_n = 2(1 + (\ln(2))^n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$.
0.5	4c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
	Exercice 02 (3 points)
	Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $$(E): \ z^2 - 2(\sqrt{3} - 1)z + 8 = 0$$
0.25	1) Vérifier que $\Delta = -4(\sqrt{3} + 1)^2$.
0.5	2) Détreminer a et b les deux solutions de (E) avec $Im(a) < Im(b)$.
1	3) Calculer a^2 et $arg(a^2)$ et en déduire que : $$a = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-5\pi}{12}\right)\right)$$
	4)On considère les points A, B et M d'affixe respectives a, b et z; $(z \in \mathbb{C}^*)$ Soit R la rotation de centre O; l'origine du repère; et d'angle : $\frac{-5\pi}{6}$.
0.5	4a) Vérifier que A est l'image du point B par R et déterminer la nature du triangle OAB.
0.25	4b) Montrer que : si (AB) et (OM) sont perpendiculaires alors z est un réel.
0.25	4c) Montrer que : si A, B et M sont des points alignés alors $Re(z) = \sqrt{3} - 1$.
0.25	4d) En déduire l'affixe du point H ; le projeté orthogonale du point O sur la droite (AB).

Exercice 03 (3 points)

Une urne U contient huit boules portants les nombres :

$$1 , 1 , 1 , -1 , -1 , 2 , 2 , 2$$

(*Toutes les boules sont indiscernables au toucher*)

On considère l'expérience suivante qui consiste à tirer successivement et sans remise trois boules de l'urne U.

Soit les événements suivants :

A : «dans l'urne; il reste au moins deux boules portant le numéro 1»

B : «obtenir trois boules portant des nombres différent deux à deux »

C :«obtenir trois boules portant des nombres dont la somme égale à 2 ou bien à 4»

1) Montrer que : $P(A) = \frac{5}{7}$

0.5 2) Calculer $P(B)$ et déduire la probabilité de l'événement D : « Obtenir trois boules

0.5 portant des nombres dont le produit est différent à (-2) »

3) Montrer que : $P(C) = \frac{27}{56}$

0.25 4) Calculer $P_C(A)$ et $P(A \cup C)$.

0.75 5) On répète cette expérience sept fois en remettant dans l'urne les boules tirées, après chaque tirage.

1 Calculer la probabilité pour que l'événement A soit réalisé exactement quatre fois.

Exercice 04 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points : $A(0;2;-1)$, $B(2;-4;1)$ et $C(1;1;0)$ et (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 9 = 0$$

0.5 1) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4(-\vec{i} + \vec{k})$

0.25 2) Montrer que : $x - z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P) passant par les points A, B et C.

0.75 3) Montrer que (S) est la sphère de diamètre $[AB]$, de centre $\Omega(1;-1;0)$ et de rayon $\sqrt{11}$.

4) Soit (Q) le plan passant par le point $D(1;2;-2)$ et parallèle au plan (P).

0.25 4a) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q).

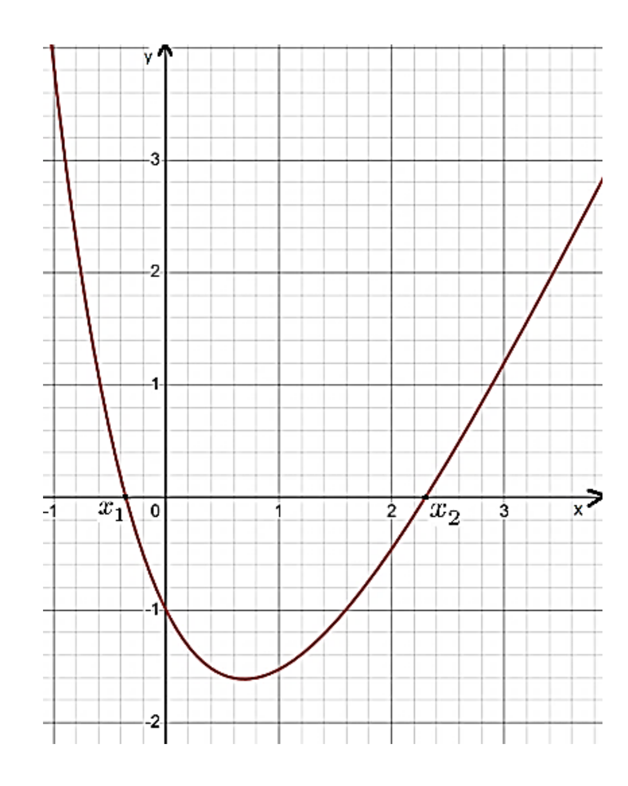
0.25 4b) Vérifier que : $d(\Omega;(Q)) = \sqrt{2}$.

1 5) Montrer que : $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 2y + z + 3 = 0$ est une équation cartésienne de la sphère (S') passant par Ω et tangente aux plans (P) et (Q).

Problème (8,5 points)

Partie I :

Dans la figure ci-dessous $(\mathcal{C}_u)$ est la courbe de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 4e^{-x} + 2x - 5$



0.25 A partir de la courbe ci-dessus déterminer le signe de $u(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1)$$

et on note (C) sa courbe représentative.

0.75 1)Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis donner une interprétation graphique.

1 2)Justifier l'égalité $\frac{4x}{e^x} \times \left(1 + \frac{xe^x}{2} - e^x\right) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; puis montrer que la courbe (C) admet au voisinage de -∞ une branche parabolique dont on précisera la direction.

0.25 3a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R});\ f'(x) = 4e^{-x}(e^x - 1)(x - 1)$$

0.5 3b) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de f.

0.5 3c) Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $]\frac{3}{2}, 2[$ tel que : $f(\alpha) = 0$. (on prendra $e^{-\frac{3}{2}} = 0{,}22$)

0.25 4) Vérifier que : $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$

0.5 5) Montrer que $f(x) - x = x \times u(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et étudier la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ): $y = x$.

1.25 6) Représenter graphiquement la courbe (C) et la droite (Δ) dans le repère $(O\ ;\vec{\imath},\vec{\jmath}\ )$ d'unité : $||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = 1\ cm$; on prendra :

$$f(1) = -0{,}5\ ; \quad x_1 \approx -0{,}35 \quad \text{et} \quad x_1 \approx 2{,}29.$$

0.25 7a) Vérifier que : $(\forall x \in]-\infty, \alpha])$; $f(x) \leq 0$

0.5 7b) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que :

$$\int_0^{\alpha} 4xe^{-x}\, dx = 2\alpha^2 - 2\alpha$$

0.5 Puis montrer que :

$$\int_0^{\alpha} f(x)\ dx = \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2 - 3)$$

0.25 et en déduire que : $\frac{3}{2} < \alpha \leq \sqrt{3}$.

0.25 8) Calculer en fonction de α, en cm², l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $y = 0$, $x = 0$ et $x = \alpha$.

Partie III

Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$.

0.5 1) Montrer que g admet une fonction resciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

0.5 2) Justifier que g^{-1} est dérivable en 0 puis montrer que :

$$(g^{-1})'(0) = \frac{1}{2\alpha(\alpha - 1)}$$

0.5 3) Tracer la courbe de la fonction g^{-1} dans le même repère.